

N° D'ORDRE :

1202

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

M. P. STOENESCO

1^{re} THÈSE. — SUR LA PROPAGATION ET L'EXTINCTION DES ONDES PLANES
DANS UN MILIEU HOMOGÈNE ET TRANSLUCIDE, POURVU
D'UN PLAN DE SYMÉTRIE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 18 mars 1905 devant la Commission d'Examen.

MM. P. APPELL,	<i>Président.</i>
BOUSSINESQ,	} <i>Examineurs.</i>
KÖENIGS,	

PARIS

MAISON D'ÉDITIONS, AD. BONNET ET C^{ie}

40, RUE DES ÉCOLES, 40

1905

N° D'ORDRE :

1202

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

M. P. STOENESCO

1^{re} THÈSE. — SUR LA PROPAGATION ET L'EXTINCTION DES ONDES PLANES
DANS UN MILIEU HOMOGÈNE ET TRANSLUCIDE, POURVU
D'UN PLAN DE SYMÉTRIE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 18 mars 1905 devant la Commission d'Examen.

MM. P. APPELL, *Président.*
BOUSSINESQ, } *Examineurs.*
KOENIGS, }



PARIS

MAISON D'ÉDITIONS, AD. BONNET ET C^{ie}

40, RUE DES ÉCOLES, 40

—
1905

UNIVERSITÉ DE PARIS

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

	MM.	
Doyen.	P. APPELL.	Mécanique rationnelle.
Doyen honoraire.	G. DARBOUX, professeur..	Géométrie supérieure.
Professeurs honoraires. {	L. TROOST.	
	Ch. WOLF.	
	LIPPMANN.	Physique.
	BOUTY.	Physique.
	BOUSSINESQ.	Physique mathématique et calcul des probabilités.
	PICARD.	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
	H. POINCARÉ.	Astronomie mathématique et Mécanique céleste.
	Y. DELAGE.	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	G. BONNIER.	Botanique.
	DASTRE.	Physiologie.
	DITTE.	Chimie.
	GIARD.	Zoologie, Évolution des êtres organisés.
	KOENIGS.	Mécanique physique et expérimentale.
	VÉLAIN.	Géographie physique.
	GOURSAT.	Calcul différentiel et calcul intégral.
Professeurs. {	CHATIN.	Histologie.
	PELLAT.	Physique.
	HALLER.	Chimie organique.
	H. MOISSAN.	Chimie.
	JOANNIS.	Chimie (enseignement P. C. N.).
	JANET.	Physique (Enseignement P. C. N.).
	WALLERANT.	Minéralogie.
	ANDOYER.	Astronomie physique.
	PAINLEVÉ.	Mathématiques générales.
	HAUG.	Géologie.
	P. CURIE.	Physique.
	TANNERY.	Calcul différentiel, calcul intégral.
	RAFFY.	Application de l'analyse à la Géométrie.
	HOUSSAY.	Zoologie.
	N.. . . .	Chimie biologique.
	N.. . . .	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparées.
	PUISEUX.	Mécanique et Astronomie.
	RIBAN.	Chimie analytique.
	LEDUC.	Physique.
Professeurs adjoints. . {	HADAMARD.	Calcul différentiel et intégral.
	MATRUCHOT.	Botanique.
	MICHEL.	Minéralogie.
	DAGUILLON.	Botanique.
	BOUVEAULT.	Chimie organique.
	BOREL.	Théorie des fonctions.
Secrétaire.	A. GUILLET.	

A MESSIEURS:

P. APPELL

MEMBRE DE L'INSTITUT, DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES

J. BOUSSINESQ

MEMBRE DE L'INSTITUT, PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES

Hommage très respectueux

P. STOENESCO



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554605_0057

PREMIÈRE THÈSE

ÉTUDE

SUR

LA PROPAGATION ET L'EXTINCTION DES ONDES PLANES

DANS UN MILIEU HOMOGÈNE

ET TRANSLUCIDE POURVU D'UN PLAN DE SYMÉTRIE

CHAPITRE PREMIER

PRÉLIMINAIRES

Encouragé par les résultats auxquels M. Boussinesq est arrivé, en cherchant à l'aide de l'analyse mathématique les lois des phénomènes optiques considérés comme dus aux vibrations de l'éther, je me suis proposé d'étudier la propagation des ondes planes dans un milieu homogène et translucide, pourvu d'un plan de symétrie, et d'en déduire la loi d'extinction.

Avant d'entrer dans le fond du sujet, je rappellerai quelques résultats qui tendent à devenir classiques par le fréquent usage qu'en a fait M. Boussinesq, ainsi que ceux qui ont adopté ses hypothèses et sa méthode mathématique.

M. Boussinesq considère l'éther comme un fluide impondérable, excessivement ténu, remplissant les espaces interstellaires et intermoléculaires. Il est supposé composé d'atomes incomparablement plus petits et plus rapprochés que les molécules des corps pondérables. Lorsque des forces extérieures agissent sur lui pour le faire sortir de son état d'équilibre, il se comporte comme un solide isotrope élastique, tant que ses déplacements n'excèdent pas ses très étroites limites d'élasticité; dans ces conditions il est apte à propager des ondes à vibrations transversales. Mais il devient le fluide le plus parfait, n'offrant aucune résistance appréciable, lorsque les forces qui agissent sur lui le font sortir des limites de son élasticité.

CHAPITRE II

ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DE L'ÉTHER LIBRE

Si on rapporte le mouvement à l'unité de volume d'éther, que l'on désigne par ξ , η , ζ , les projections, sur trois axes rectangulaires fixes, du déplacement compté à partir de la position moyenne ou d'équilibre, par ρ la densité, par μ le coefficient d'élasticité, par θ la dilatation cubique $\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}$, par Δ_2 le paramètre différentiel de Lamé $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$, les équations du mouvement de l'éther libre sont

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \mu \left(\Delta_{xz} \xi - \frac{d\theta}{dx} \right), \\ \rho \frac{d^2 \eta}{dt^2} = \mu \left(\Delta_{xy} \eta - \frac{d\theta}{dy} \right), \\ \rho \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \mu \left(\Delta_{xz} \zeta - \frac{d\theta}{dz} \right). \end{array} \right.$$

Ces équations sont établies dans la Théorie de l'Élasticité pour les corps isotropes pondérables. Elles s'appliquent à l'éther en ajoutant l'hypothèse particulière, que vérifient les faits optiques, de l'annulation de la vitesse de propagation des ondes à vibrations longitudinales.

M. Boussinesq a d'ailleurs établi directement ces équations (1) en s'appuyant sur les propriétés qui résultent de l'hypothèse d'isotropie de l'éther et en admettant que les déplacements suivant les axes ξ, η, ζ dépendent linéairement des six dérivées premières $\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{d(x, y, z)}$ et des dix-huit dérivées secondes $\frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{d(x, y, z)d(x, y, z)}$.

CHAPITRE III

ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DE L'ÉTHER DANS UN MILIEU ISOTROPE

Pour légitimer les équations dont je vais faire usage, j'estime nécessaire de donner quelques explications sur la

manière dont se comporte l'éther en mouvement lorsqu'il imprègne un corps pondérable isotrope et transparent.

Lorsque des ondes calorifiques ou lumineuses arrivent à la surface d'un corps et pénètrent dans ses espaces intermoléculaires, l'éther du corps est gêné dans son mouvement par les molécules du corps qui lui opposent des résistances analogues à celles d'un solide immergé dans un fluide oscillant.

La résistance, qu'oppose un solide sphérique au mouvement d'une masse fluide animée d'un mouvement pendulaire, se compose de deux parties : l'une proportionnelle à l'accélération relative $\frac{dV}{dt}$ du fluide par rapport au solide immergé, l'autre proportionnelle à la vitesse relative V du fluide. Mais l'expérience montre que la partie de la résistance provenant de la vitesse vibratoire V est d'autant plus négligeable, vis-à-vis de celle qui provient de l'accélération, que la période vibratoire est plus courte.

Dans le cas de l'éther baignant les molécules d'un corps isotrope et transparent, ses vibrations lumineuses admettant une période τ excessivement courte, on pourra admettre que la résistance proportionnelle à la vitesse V est négligeable en comparaison de la résistance proportionnelle à l'accélération $\frac{dV}{dt}$.

D'autre part, vu l'extrême faiblesse de la densité ρ de l'éther par rapport à celles des corps pondérables, les molécules des corps imprégnés par l'éther se comportent, vis-à-vis de ce fluide, comme de très lourds flotteurs dont les mouvements sont insensibles en comparaison de ceux de l'éther, de sorte que l'on peut confondre le mouvement relatif de l'éther avec

DANS UN MILIEU HOMOGÈNE ET TRANSLUCIDE POURVU D'UN PLAN DE SYMÉTRIE 9

son mouvement propre ou mouvement absolu, et alors, la résistance correspondant à l'accélération de l'éther et évaluée par unité de volume d'éther aura pour projections

$$\rho\alpha \frac{d^2\zeta}{dt^2}, \quad \rho\alpha \frac{d^2\eta}{dt^2}, \quad \rho\alpha \frac{d^2\zeta'}{dt^2},$$

α étant un coefficient constant dans toutes les directions, car le corps est supposé isotrope. Les équations du mouvement de l'éther dans un milieu isotrope et transparent sont donc

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho(1+\alpha) \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \mu \left(\Delta_2 \zeta - \frac{d\theta}{dx} \right), \\ \rho(1+\alpha) \frac{d^2\eta}{dt^2} = \mu \left(\Delta_2 \eta - \frac{d\theta}{dy} \right), \\ \rho(1+\alpha) \frac{d^2\zeta'}{dt^2} = \mu \left(\Delta_2 \zeta' - \frac{d\theta}{dz} \right). \end{array} \right.$$

CHAPITRE IV

ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DE L'ÉTHER DANS UN MILIEU HOMOGÈNE ET TRANSPARENT

Dans un travail très approfondi, concernant la résistance qu'oppose un solide de forme quelconque plongé dans un liquide en mouvement, M. Boussinesq a déduit, par analogie, les formules de la résistance opposée à l'éther par un corps pondérable homogène et transparent, les résistances étant rapportées à l'unité de volume de l'éther ;

$$(3) \quad \begin{cases} R_x = \rho \left(A \frac{d^2 \xi}{dt^2} + F \frac{d^2 \eta}{dt^2} + E' \frac{d^2 \zeta}{dt^2} \right), \\ R_y = \rho \left(F' \frac{d^2 \xi}{dt^2} + B \frac{d^2 \eta}{dt^2} + D \frac{d^2 \zeta}{dt^2} \right), \\ R_z = \rho \left(E \frac{d^2 \xi}{dt^2} + D' \frac{d^2 \eta}{dt^2} + C \frac{d^2 \zeta}{dt^2} \right), \end{cases}$$

où A, B, C sont trois constantes positives, propres à chaque milieu, et appelées coefficients de résistance directs; et les constantes D, D', E, E', F, F' sont les coefficients de résistance indirects. Dans la question de la résistance opposée à un fluide, ils sont égaux deux à deux; et l'on a

$$D' = D, E' = E, F' = F.$$

Les équations des mouvements, dans ce cas, s'obtiennent, en ajoutant aux premiers membres de (1) la résistance correspondante (3).

Lorsque la contexture du milieu pondérable présente trois axes (ou trois plans) rectangulaires de symétrie, et qu'on rapporte le mouvement à ces axes, on vérifie facilement que les six coefficients indirects de résistance D, D', E, E', F, F' , sont nuls, de sorte que les équations du mouvement sont analogues aux équations (2), mais avec trois coefficients distincts A, B, C au lieu du coefficient commun α qui caractérise un milieu isotrope:

$$(4) \quad \begin{cases} \rho(1 + A) \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \mu \left(\Delta_2 \xi - \frac{d\theta}{dx} \right), \\ \rho(1 + B) \frac{d^2 \eta}{dt^2} = \mu \left(\Delta_2 \eta - \frac{d\theta}{dy} \right), \\ \rho(1 + C) \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \mu \left(\Delta_2 \zeta - \frac{d\theta}{dz} \right). \end{cases}$$

Lorsque le milieu homogène et transparent n'est pas de texture symétrique, on considèrera l'ellipsoïde

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + (D + D')\eta\zeta + (E + E')\zeta\xi + (F + F')\xi\eta = \text{const.}$$

Un changement de coordonnées quelconque donnera pour les résistances des formules analogues aux (3) et où les neuf coefficients de résistance $A, B, C, D, D', E, E', F, F'$ seront remplacés par d'autres que je désigne par $A_1, B_1, C_1, D_1, D'_1, E_1, E'_1, F_1, F'_1$ et dont on calculera facilement les expressions par les formules connues de la Géométrie analytique. Dans ce nouveau système d'axes, l'ellipsoïde précédent aura comme équation, ξ_1, η_1, ζ_1 désignant les nouvelles coordonnées,

$$(5) \quad A_1\xi_1^2 + B_1\eta_1^2 + C_1\zeta_1^2 + (D_1 + D'_1)\eta_1\zeta_1 \\ + (E_1 + E'_1)\zeta_1\xi_1 + (F_1 + F'_1)\xi_1\eta_1 = \text{const.}$$

Si on choisit précisément comme nouveaux axes de coordonnées ceux de l'ellipsoïde, appelés axes principaux de résistance, on aura

$$D_1 + D'_1 = 0 \quad E_1 + E'_1 = 0 \quad F_1 + F'_1 = 0.$$

et dans les nouvelles expressions des résistances les coefficients indirects de résistance seront deux à deux égaux et de signes contraires.

Si on pousse l'analogie avec la résistance des liquides jusqu'à admettre que les six coefficients indirects de résistance sont, de plus, deux à deux égaux, comme ils sont en même temps de signes contraires, ils seront nuls, et les

équations du mouvement de l'éther dans un milieu homogène et transparent, rapporté aux axes principaux de résistances, auront la même forme (4) que pour un milieu à contexture symétrique, rapporté à ses axes de symétrie.

CHAPITRE V

ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DE L'ÉTHER DANS UN MILIEU HOMOGÈNE ET TRANSLUCIDE POURVU D'UN PLAN DE SYMÉTRIE

Lorsque le milieu cesse d'être transparent, le mouvement vibratoire de l'éther s'éteint à mesure que les ondes avancent dans le milieu pondérable et il faudra, dans les équations du mouvement de l'éther qui pénètre un pareil milieu translucide, tenir compte des résistances des molécules pondérables qui sont proportionnelles aux vitesses du mouvement vibratoire et que nous avons négligées dans le cas d'un milieu transparent. Toujours par analogie avec ce qui se passe chez les liquides, les résistances dues aux vitesses peuvent se mettre, dans le cas général, sous la forme

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} R'_x = \mu \left(2a' \frac{d\xi}{dt} + f \frac{d\eta}{dt} + e' \frac{d\zeta}{dt} \right), \\ R'_y = \mu \left(f' \frac{d\xi}{dt} + 2b' \frac{d\eta}{dt} + d \frac{d\zeta}{dt} \right), \\ R'_z = \mu \left(e \frac{d\xi}{dt} + d' \frac{d\eta}{dt} + 2c' \frac{d\zeta}{dt} \right), \end{array} \right.$$

où μ est le coefficient d'élasticité de l'éther et les coefficients $a', b', c', d, d', e, e', f, f'$ sont supposés contenir en facteur la densité constante ρ de l'éther. Il faudra ajouter ces résistances, respectivement, aux premiers membres des équations (4) pour avoir les équations générales du mouvement dans un milieu homogène et translucide.

Mettons-nous dans le cas qui fait l'objet de cette Thèse et où le milieu homogène et translucide est pourvu d'un plan de symétrie que nous prenons pour plan des xy . Ce plan de symétrie est l'un des plans principaux de l'ellipsoïde (5). En rapportant le mouvement aux axes de l'ellipsoïde (5), c'est-à-dire aux axes principaux des résistances dues aux accélérations, les équations du mouvement de l'éther se déduisent de (4) où l'on a ajouté aux premiers membres les valeurs correspondantes de (6).

Cherchons ce que deviennent ces résistances dans ce système d'axes qui sont les axes principaux d'élasticité du milieu. Le plan des xy étant un plan de symétrie pour la contexture du milieu, les formules (6) des résistances ne doivent pas changer de forme lorsqu'on renverse le sens de l'axe des z , c'est-à-dire lorsqu'on change les signes de z , de ζ et de R'_z . Or par un pareil changement de sens ξ, η, R'_x, R'_y ne changent pas, il faut donc que dans les résistances R'_x, R'_y les coefficients des dérivées qui changent de signes soient nuls, ce qui entraîne

$$d = 0, \quad e' = 0.$$

mais la résistance R'_z changeant de signes, ainsi que la dérivée $\frac{d\zeta}{dt}$, il en résulte que les coefficients des dérivées qui

ne changent pas de signe sont nuls, donc

$$d' = 0, \quad c = 0.$$

de sorte que dans ce système d'axes les résistances (6), provenant de la vitesse vibratoire de l'éther, ont les expressions

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} R'_x = \mu \left(2a' \frac{d\zeta}{dt} + f \frac{d\eta}{dt} \right), \\ R'_y = \mu \left(f' \frac{d\zeta}{dt} + 2b' \frac{d\eta}{dt} \right), \\ R'_z = \mu 2c' \frac{d\zeta}{dt}. \end{array} \right.$$

Si donc nous ajoutons ces résistances aux premiers membres de (4) respectivement, qu'ensuite nous divisons par μ et que nous posons

$$\frac{\rho(1+A)}{\mu} = \frac{1}{a^2}, \quad \frac{\rho(1+B)}{\mu} = \frac{1}{b^2}, \quad \frac{\rho(1+C)}{\mu} = \frac{1}{c^2},$$

nous aurons les équations du mouvement de l'éther dans un milieu homogène et translucide, pourvu d'un plan de symétrie, le milieu étant rapporté à ses axes principaux d'élasticité et le plan de symétrie étant pris pour plan des xy :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a^2} \frac{d^2\zeta}{dt^2} + 2a' \frac{d\zeta}{dt} + f \frac{d\eta}{dt} = \Delta^2\zeta - \frac{d\theta}{dx}, \\ \frac{1}{b^2} \frac{d^2\eta}{dt^2} + f' \frac{d\zeta}{dt} + 2b' \frac{d\eta}{dt} = \Delta^2\eta - \frac{d\theta}{dy}, \\ \frac{1}{c^2} \frac{d^2\zeta}{dt^2} + 2c' \frac{d\zeta}{dt} = \Delta^2\zeta - \frac{d\theta}{dz}, \end{array} \right.$$

où a' , b' , c' , f , f' sont de très petites constantes, propres à chaque milieu, et dont on pourra, à une première approximation, négliger les carrés et doubles produits.

On aurait d'ailleurs pu traiter les résistances (6) comme nous avons traité celles (3) qui sont dues aux accélérations du mouvement vibratoires de l'éther et alors on aurait été amené à considérer un ellipsoïde analogue à (4). Si les axes de ces deux ellipsoïdes coïncident, ce qui arrive pour les milieux qui cristallisent dans les quatre premiers systèmes, on serait amené à poser, comme pour les coefficients indirects de résistance provenant des accélérations,

$$d + d' = 0, \quad e + e' = 0, \quad f + f' = 0.$$

Dans le cas qui nous occupe, d'un milieu homogène et translucide, pourvu d'un plan de symétrie, la somme $f + f'$ est une très petite quantité dont on pourra négliger le carré, de sorte que si nous posons

$$(9) \quad f = \varphi + g, \quad f' = \varphi - g$$

$$\text{d'où} \quad f + f' = 2\varphi$$

les expressions (7) des résistances, correspondant aux vitesses, pourraient se mettre sous la forme

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} R'_x = \mu \left(2a' \frac{d\zeta}{dt} + \varphi \frac{dx}{dt} \right) - \mu g \frac{dx}{dt}, \\ R'_y = \mu \left(\varphi \frac{d\zeta}{dt} + 2b' \frac{dx}{dt} \right) - \mu g \frac{d\zeta}{dt}, \\ R'_z = \mu \left(2c' \frac{d\zeta}{dt} \right). \end{array} \right.$$

Considérons la fonction V homogène et du second degré en ξ', η', ζ' définie par

$$(11) \quad \frac{1}{\mu} \varpi = a' \zeta'^2 + b' \eta'^2 + c' \xi'^2 + \phi \xi' \eta',$$

on voit immédiatement que les parties entre parenthèses des résistances (10) sont les dérivées par rapport à ξ', η', ζ' de la fonction ϖ , donc ces parties des résistances dérivent d'un potentiel de vitesses qui est ϖ .

CHAPITRE VI

ÉTUDE DE L'EXTINCTION DES ONDES

Considérons un système d'ondes planes, indéfinies, à vibrations pendulaires, tombant sur la face plane d'un milieu homogène et translucide, à l'intérieur duquel le mouvement de l'éther est régi par les équations (8). Les ondes incidentes ayant toute la même amplitude au moment où elles rencontrent la face plane du milieu homogène, cette face d'entrée sera un plan d'égale amplitude; d'ailleurs vu l'identité des circonstances qui se présentent sur tout plan parallèle à la face d'entrée du milieu, ces plans sont d'égale amplitude et à cause de la translucidité du milieu l'amplitude diminue à mesure qu'on avance dans le milieu.

Soient α, β, γ les angles de la normale aux plans d'onde avec

les axes coordonnés, ω la vitesse de propagation des ondes, λ, μ, ν les cosinus de la normale à la face d'entrée ou aux plans d'égale amplitude, u la distance $\lambda x + \mu y + \nu z$ d'un plan d'égale amplitude à la face d'entrée du milieu, U l'amplitude du mouvement vibratoire de l'éther au point (x, y, z) . L'amplitude U est, dans les corps qui ne sont pas très opaques, fonction lentement variable de u , de sorte qu'à une première approximation on pourra négliger les dérivées de U d'ordre supérieur à l'unité. Posons en outre,

$$(12) \quad (l, m, n) = \frac{\cos(\alpha, \beta, \gamma)}{\omega}.$$

Les projections ξ, η, ζ du mouvement vibratoire de l'éther seront de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = U [A \cos k(t - lx - my - nz) + B \sin k(t - lx - my - nz)], \\ \eta = U [A_1 \cos k(t - lx - my - nz) + B_1 \sin k(t - lx - my - nz)], \\ \zeta = U [A_2 \cos k(t - lx - my - nz) + B_2 \sin k(t - lx - my - nz)], \end{array} \right.$$

où $k = \frac{2\pi}{\tau}$, τ désignant la période du mouvement vibratoire.

Si nous remplaçons, dans les équations du mouvement vibratoire, ξ, η, ζ par ces expressions, chaque équation contiendra à ses deux membres deux termes à coefficients binomes en U et U' , ces termes étant affectés, l'un, du cosinus, l'autre, du sinus, de l'arc $k(t - lx - my - nz)$. Ces équations devant être vérifiées aux époques où s'annule soit le cosinus, soit le sinus, on est obligé d'annuler, dans chaque équation, séparément, les coefficients du cosinus et du sinus. On

obtient ainsi des équations de la forme $PU + QU' = 0$. Ces équations devant être compatibles, on est amené à prendre pour U une expression de la forme

$$U = Ce^{-fu} :$$

et alors on pourra mettre ξ, η, ζ sous les formes

$$(13) \quad \begin{cases} \xi = l'e^{-fu} \cos [k(t - lx - my - nz) + \lambda'], \\ \eta = m'e^{-fu} \cos [k(t - lx - my - nz) + \mu'], \\ \zeta = n'e^{-fu} \cos [k(t - lx - my - nz) + \nu'], \end{cases}$$

où λ', μ', ν' sont des constantes qui par leurs inégalités introduisent des différences de phases entre les déplacements ξ, η, ζ suivant les trois axes, rendant ainsi les trajectoires de l'éther elliptiques, fait qui n'influe pas sur l'extinction; l', m', n' seraient proportionnels aux cosinus directeurs de la vibration si elle était rectiligne ou que λ', μ', ν' fussent égaux.

Des intégrales (13) l'on déduit un autre système de solutions des équations du mouvement, en reculant dans le passé l'origine du temps d'un quart de période, de manière à remplacer t par $t - \frac{\pi}{2k}$. On aura ainsi le nouveau système d'intégrales

$$(14) \quad \begin{cases} \xi = l'e^{-fu} \sin [k(t - lx - my - nz) + \lambda'], \\ \eta = m'e^{-fu} \sin [k(t - lx - my - nz) + \mu'], \\ \zeta = n'e^{-fu} \sin [k(t - lx - my - nz) + \nu']. \end{cases}$$

De ces deux systèmes d'intégrales (13), (14), nous déduisons

un autre système de solutions des équations du mouvement, en les ajoutant membre à membre, après avoir multiplié les intégrales (14) par $\sqrt{-1}$, ce qui donne

$$(15) \quad \begin{cases} \xi = l' e^{-fu} e^{[k(t-lx-my-nz) + i] \sqrt{-1}}, \\ \eta = m' e^{-fu} e^{[k(t-lx-my-nz) + \mu] \sqrt{-1}}, \\ \zeta = n' e^{-fu} e^{[k(t-lx-my-nz) + \nu] \sqrt{-1}}. \end{cases}$$

Si nous remplaçons u par son expression $\lambda x + \mu y + \nu z$ et que nous posons

$$(16) \quad \begin{cases} L' = l' e^{i\sqrt{-1}}, & M' = m' e^{\mu\sqrt{-1}}, & N' = n' e^{\nu\sqrt{-1}}; \\ L = l - \frac{f}{k} \lambda \sqrt{-1}, & M = m - \frac{f}{k} \mu \sqrt{-1}, & N = n - \frac{f}{k} \nu \sqrt{-1}; \end{cases}$$

le système symbolique (15) prend la forme

$$(17) \quad \begin{cases} \xi = L' e^{k(t-Lx-My-Nz)\sqrt{-1}}, \\ \eta = M' e^{k(t-Lx-My-Nz)\sqrt{-1}}, \\ \zeta = N' e^{k(t-Lx-My-Nz)\sqrt{-1}}. \end{cases}$$

De cette analyse on conclut qu'étant connu un système d'intégrales de la forme (17), solutions des équations du mouvement vibratoire, on en déduira les solutions réelles (13) en considérant leurs parties réelles. Il est à remarquer que ces parties réelles des solutions contiennent le facteur commun d'amortissement ou d'extinction

$$(17') \quad A = e^{-fu} = e^{-f(\lambda x + \mu y + \nu z)},$$

qui diminue lorsque u croît, c'est-à-dire lorsqu'on s'éloigne de la face d'entrée dans le milieu translucide, mais reste constant sur tout plan parallèle à la face d'entrée $u = c^0$, au plan d'égale amplitude. Le coefficient f s'appelle, pour cette raison, coefficient d'extinction ou d'absorption.

Sachant donc que les équations du mouvement admettent comme solutions symboliques des intégrales de la forme (17) où $l, m, n, \lambda, \mu, \nu$ sont donnés, proposons-nous d'établir la loi d'extinction des ondes.

A cet effet, la forme symbolique (17) nous permettra de mettre les équations du mouvement (8) sous une forme plus simplifiée. Des intégrales (17) nous tirons en premier lieu

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= k\sqrt{-1}\xi, & \frac{d\eta}{dt} &= k\sqrt{-1}\eta, & \frac{d\zeta}{dt} &= k\sqrt{-1}\zeta; \\ \frac{d^2\xi}{dt^2} &= k\sqrt{-1}\frac{d\xi}{dt}, & \frac{d^2\eta}{dt^2} &= k\sqrt{-1}\frac{d\eta}{dt}, & \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= k\sqrt{-1}\frac{d\zeta}{dt}. \end{aligned}$$

Remplaçons dans les équations du mouvement (8) les dérivées premières $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$ en fonction des dérivées secondes $\frac{d^2\xi}{dt^2}, \frac{d^2\eta}{dt^2}, \frac{d^2\zeta}{dt^2}$ tirées de ces relations et posons

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} A &= a \left(1 + \frac{a^2 a'}{k} \sqrt{-1} \right), \\ B &= b \left(1 + \frac{b^2 b'}{k} \sqrt{-1} \right), \\ C &= c \left(1 + \frac{c^2 c'}{k} \sqrt{-1} \right), \\ F &= -\frac{f}{k} \sqrt{-1}, \quad F' = -\frac{f'}{k} \sqrt{-1}. \end{aligned} \right.$$

Avec ces notations les équations (8) du mouvement prennent la forme

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\xi}{A^2} + F\eta \right) = \Delta_2 \xi - \frac{d\eta}{dx}, \\ \frac{d^2}{dt^2} \left(F'\xi + \frac{\eta}{B^2} \right) = \Delta_2 \eta - \frac{d\xi}{dy}, \\ \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\zeta}{C^2} \right) = \Delta_2 \zeta - \frac{d\eta}{dz}. \end{array} \right.$$

Les équations du mouvement de l'éther dans un milieu homogène et translucide, pourvu d'un plan de symétrie et rapporté à ses axes principaux d'élasticité étant mises sous cette forme, remplaçons-y maintenant ξ, η, ζ et leurs dérivées par leurs valeurs (17). On a d'abord

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= kL'\sqrt{-1} e^{k(t-Lx-My-Nz)\sqrt{-1}}, & \frac{d\eta}{dt} &= kM'\sqrt{-1} e^{\dots}, & \frac{d\zeta}{dt} &= kN'\sqrt{-1} e^{\dots}, \\ \frac{d^2\xi}{dt^2} &= -k^2L'e^{\dots}, & \frac{d^2\eta}{dt^2} &= -k^2M'e^{\dots}, & \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= -k^2N'e^{\dots}, \\ \frac{d\xi}{dx} &= -kL'L\sqrt{-1} e^{\dots}, & \frac{d\xi}{dy} &= -kL'M\sqrt{-1} e^{\dots}, & \frac{d\xi}{dz} &= -kL'N\sqrt{-1} e^{\dots}, \\ \frac{d\eta}{dx} &= -kM'L\sqrt{-1} e^{\dots}, & \frac{d\eta}{dy} &= -kM'M\sqrt{-1} e^{\dots}, & \frac{d\eta}{dz} &= -kM'N\sqrt{-1} e^{\dots}, \\ \frac{d\zeta}{dx} &= -kN'L\sqrt{-1} e^{\dots}, & \frac{d\zeta}{dy} &= -kN'M\sqrt{-1} e^{\dots}, & \frac{d\zeta}{dz} &= -kN'N\sqrt{-1} e^{\dots}, \\ \frac{d^2\xi}{dx^2} &= -k^2L'L^2e^{\dots}, & \frac{d^2\xi}{dy^2} &= -k^2L'M^2e^{\dots}, & \frac{d^2\xi}{dz^2} &= -k^2L'N^2e^{\dots}, \\ \frac{d^2\eta}{dx^2} &= -k^2M'L^2e^{\dots}, & \frac{d^2\eta}{dy^2} &= -k^2M'M^2e^{\dots}, & \frac{d^2\eta}{dz^2} &= -k^2M'N^2e^{\dots}, \end{aligned}$$

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} = -k^2 N' L^2 e^{\dots}, \quad \frac{d^2\zeta}{dy^2} = -k^2 N' M^2 e^{\dots}, \quad \frac{d^2\zeta}{dz^2} = -k^2 N' N^2 e^{\dots},$$

De là nous tirons

$$\begin{aligned} \Delta_2 \zeta &= \frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\zeta}{dy^2} + \frac{d^2\zeta}{dz^2} = -k^2 L' (L^2 + M^2 + N^2) e^{k(t - Lx - My - Nz)\sqrt{-1}}, \\ \Delta_2 \tau &= -k^2 M' (L^2 + M^2 + N^2) e^{k(t - Lx - My - Nz)\sqrt{-1}}, \\ \Delta_2 \zeta &= -k^2 N' (L^2 + M^2 + N^2) e^{k(t - Lx - My - Nz)\sqrt{-1}}, \\ \frac{d\theta}{dx} &= -k^2 L (LL' + MM' + NN') e^{k(t - Lx - My - Nz)\sqrt{-1}}, \\ \frac{d\theta}{dy} &= -k^2 M (LL' + MM' + NN') e^{k(t - Lx - My - Nz)\sqrt{-1}}, \\ \frac{d\theta}{dz} &= -k^2 N (LL' + MM' + NN') e^{k(t - Lx - My - Nz)\sqrt{-1}}. \end{aligned}$$

Portons ces expressions dans les équations du mouvement (19) et divisons par le facteur commun $k^2 e^{k(t - Lx - My - Nz)\sqrt{-1}}$, nous obtenons trois relations entre les coefficients L', M', N' :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\Lambda^2} L' - FM' &= -(L^2 + M^2 + N^2) L' + (LL' + MM' + NN') L, \\ -F'L' - \frac{1}{\Lambda^2} M' &= -(L^2 + M^2 + N^2) M' + (LL' + MM' + NN') M, \\ -\frac{1}{\Lambda^2} N' &= -(L^2 + M^2 + N^2) N' + (LL' + MM' + NN') N. \end{aligned}$$

Si nous faisons passer dans les premiers membres les premiers termes des seconds membres, que nous ordonnions ensuite les premiers membres suivant L', M', N' , et que nous

positions

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} S^2 = L^2 + M^2 + N^2, \\ (U, V, W) = \frac{1 - (A^2, B^2, C^2) S^2}{(A^2, B^2, C^2)}, \end{array} \right.$$

les équations précédentes prennent la forme

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} UL' + FM' = -(LL' + MM' + NN') L, \\ F'L' + VM' = -(LL' + MM' + NN') M, \\ WN' = -(LL' + MM' + NN') N. \end{array} \right.$$

De ce système de trois équations nous déduisons des quantités proportionnelles à L' , M' , N' par les trois rapports égaux

$$(22) \quad \frac{L'}{W(LV - MF)} = \frac{M'}{W(MU - LF')} = \frac{N'}{N(UV - FF')}.$$

Portons ces valeurs proportionnelles de L' , M' , N' dans l'une quelconque des équations (21) linéaires et homogènes en L' , M' , N' . Nous obtiendrons, après réductions, l'équation

$$(23) \quad \frac{L^2}{A^2U} + \frac{M^2}{B^2V} + \frac{N^2}{C^2W} - \frac{N^2FF' + (FL' + LMF + LMF')W}{UVW} S^2 = 0.$$

Ajoutons au premier membre la quantité identiquement nulle $S^2 - (L^2 + M^2 + N^2)$, multiplions ensuite le premier membre par $\frac{UVW}{S^2}$, réduisons les termes en L^2 , M^2 , N^2 , en

tenant compte des relations (20). Il viendra

$$(24) \quad L^2VW + M^2WU + N^2UV - N^2FF' \\ - (FF' + LMF + LMF')W + UVW = 0.$$

Remplaçons F, F' par leurs expressions (18) en fonction de f, f' : il vient

$$(25) \quad L^2VW + M^2WU + N^2UV + \frac{\Pi'}{k^2}W + \frac{LMW(f+f')}{k}\sqrt{-1} \\ + \frac{N^2\Pi'}{k^2} + UVM = 0.$$

Pour séparer dans cette équation la partie réelle de la partie imaginaire il faudrait mettre à la place de L, M, N, U, V, W , leurs expressions explicites (16), (18), (20), mais ce procédé, outre qu'il serait extrêmement laborieux, nous conduirait à des résultats pénibles à manier et difficiles à interpréter.

Pour arriver au résultat final, nous allons employer une autre méthode. Posons à cet effet

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{lll} L = l + \delta L, & M = m + \delta M, & N = n + \delta N, \\ U = U_0 + \delta U, & V = V_0 + \delta V, & W = W_0 + \delta W, \\ A = a + \delta A, & B = b + \delta B, & C = c + \delta C. \end{array} \right.$$

où $l, m, n, U_0, V_0, W_0, a, b, c$ sont les parties réelles de $L, M, N, U, V, W, A, B, C$ tandis que les accroissements différentiels $\delta L, \delta M, \dots \delta C$ en sont les parties imaginaires, dont on pourra bien, à cause de leur extrême petitesse, négliger les

carrés et doubles produits, c'est-à-dire ne conserver que les premiers ordres et dont les expressions sont, d'après (16), (18), (20),

$$(27) \left\{ \begin{aligned} \partial(L, M, N) &= \frac{f}{k} (\lambda, \mu, \nu) \sqrt{-1}, \\ \partial(A, B, C) &= \left(\frac{a^3 a'}{k}, \quad \frac{b^3 b'}{k}, \quad \frac{c^3 c'}{k} \right) \sqrt{-1}, \\ \partial U &= -\frac{\delta A}{a^3} - 2(l\delta L + m\delta M + n\delta N) = -\frac{a' - f(l\lambda + m\mu + n\nu)}{k} \sqrt{-1}, \\ \partial V &= -\frac{\delta B}{b^3} - 2(l\delta L + m\delta M + n\delta N) = -\frac{b' - f(l\lambda + m\mu + n\nu)}{k} \sqrt{-1}, \\ \partial W &= -\frac{\delta C}{c^3} - 2(l\delta L + m\delta M + n\delta N) = -\frac{c' - f(l\lambda + m\mu + n\nu)}{k} \sqrt{-1}. \end{aligned} \right.$$

Pour avoir la partie imaginaire de (25), nous la différencions totalement en y réduisant L, M, N, U, V, W à leurs parties réelles l, m, n, U_0, V_0, W_0 , en observant que l'équation (25) contient un terme multiplié par $\sqrt{-1}$ et en négligeant les carrés et doubles produits des accroissements différentiels $\delta L, \delta M, \dots, \delta W$.

La partie imaginaire de (25) sera donc

$$(28) \quad (m^2 W_0 + n^2 V_0 + V_0 W_0) \delta U + (n^2 U_0 + l^2 W_0 + W_0 U_0) \delta V \\ + (l^2 V_0 + m^2 W_0 + U_0 V_0) \delta W + \frac{ff'}{k^2} \delta W + 2lV_0 W_0 \delta L \\ + 2mW_0 U_0 \delta M + 2n \left(U_0 V_0 + \frac{ff'}{k^2} \right) \delta N + \frac{lmW_0(f + f')}{k} \sqrt{-1} = 0,$$

tandis que la partie réelle de (25) sera, toujours au second

ordre près,

$$(29) \quad l^2 V_0 W_0 + m^2 W_0 U_0 + n^2 U_0 V_0 + \frac{ff'}{k^2} W_0 + \frac{lm(f+f')\delta W}{k} \sqrt{-1} \\ + n^2 \frac{ff'}{k^2} + U_0 V_0 W_0 = 0.$$

Si nous désignons par V'' l'angle aigu que fait le plan d'onde avec le plan d'égale amplitude, nous aurons

$$(29') \quad \cos V'' = \lambda \cos \alpha + \mu \cos \beta + \nu \cos \gamma = \omega (l\lambda + m\mu + n\nu);$$

et les expressions (27) de $\delta U, \delta V, \delta W$, prendront la forme simplifiée :

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta U = - \frac{a' - f \frac{\cos V''}{\omega}}{h} \sqrt{-1}, \\ \delta V = - \frac{b' - f \frac{\cos V''}{\omega}}{k} \sqrt{-1}, \\ \delta W = - \frac{c' - f \frac{\cos V''}{\omega}}{h} \sqrt{-1}. \end{array} \right.$$

Partie réelle. — Occupons-nous d'abord de l'équation (29), qui représente la partie réelle de l'équation (25). Si nous y remplaçons δW par son expression (30), le terme correspondant prend la forme

$$\frac{lm(f+f')\delta W}{k} \sqrt{-1} = \frac{lm(f+f')}{k^2} \left(c' - f \frac{\cos V''}{\omega} \right).$$

Or, dans les corps qui ne sont pas très opaques, le coefficient d'extinction f est très petit (de l'ordre des accroissements différentiels précédents) et comme, dans cette expression, il se trouve multiplié soit par f soit par f' , le terme en $f \frac{\cos V''}{\omega}$ sera négligeable, aux mêmes approximations admises, et nous aurons sensiblement, pour le terme en δW de l'équation (29)

$$\frac{lm(f+f')\delta W}{k} \sqrt{-1} = \frac{lmc'(f+f')}{k^2}.$$

Avec cette approximation, la partie réelle (29) de l'équation (25) et qui régit la vitesse de propagation des ondes, devient

$$(31) \quad l^2 V_0 W_0 + m^2 W_0 U_0 + n^2 U_0 V_0 + \frac{ff'}{k^2} W_0 + \frac{lmc'(f+f')}{k^2} + \frac{n^2 ff'}{k^2} + U_0 V_0 W_0 = 0.$$

Partie imaginaire. — Considérons maintenant l'équation (28) qui représente la partie imaginaire de l'équation (25).

Si nous tenons compte de l'équation (31), les coefficients de δU , δV , δW dans (28) peuvent s'écrire

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} m^2 W_0 + n^2 V_0 + V_0 W_0 = - \frac{l^2 V_0 W_0 + \frac{ff'(W_0 + n^2)}{k^2} + lmc'(f+f')}{U_0}, \\ n^2 U_0 + l^2 W_0 + W_0 U_0 = - \frac{m^2 W_0 U_0 + \frac{ff'(W_0 + n^2)}{k^2} + lmc'(f+f')}{V_0}, \\ l^2 V_0 + m^2 U_0 + U_0 V_0 + \frac{ff'}{k^2} = - \frac{n^2 U_0 V_0 + \frac{n^2 ff' + lmc'(f+f')}{k^2}}{W_0}. \end{array} \right.$$

Nous allons maintenant mettre la partie imaginaire (28) sous forme explicite en fonction des données.

A cet effet, remplaçons dans (28) les accroissements différentiels δU , δV , δW par leurs expressions (30) et les coefficients de ces accroissements différentiels par leurs expressions (32);

Si ensuite nous divisons par $2 U_0 V_0 W_0$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 (33) \quad & (l\delta L + m\delta M + n\delta N) \left[\frac{l^2}{U_0^2} + \frac{ff'(W_0 + n^2) + lmc'(f + f')}{k^2 U_0^2 V_0 W_0} \right. \\
 & \quad + \frac{m^2}{V_0^2} + \frac{ff'(W_0 + n^2) + lmc'(f + f')}{k^2 U_0 V_0^2 W_0} \\
 & \quad \left. + \frac{n^2}{W_0^2} + \frac{ff'n^2 + lmc'(f + f')}{k^2 U_0 V_0 W_0^2} \right] \\
 & + \left[\frac{l^2}{U_0^2} + \frac{ff'(W_0 + n^2) + lmc'(f + f')}{k^2 U_0^2 V_0 W_0} \right] \frac{\delta A}{a^3} \\
 & + \left[\frac{m^2}{V_0^2} + \frac{ff'(W_0 + n^2) + lmc'(f + f')}{k^2 U_0 V_0^2 W_0} \right] \frac{\delta B}{b^3} \\
 & + \left[\frac{n^2}{W_0^2} + \frac{ff'n^2 + lmc'(f + f')}{k^2 U_0 V_0 W_0^2} \right] \frac{\delta C}{c^3} \\
 & + \frac{l}{U_0} \delta L + \frac{m}{V_0} \delta M + n \left(\frac{1}{W_0} + \frac{ff'}{k^2 U_0 V_0 W_0} \right) \delta N + \frac{lm(f + f')}{2k U_0 V_0} \sqrt{-1} = 0.
 \end{aligned}$$

Si nous ordonnons cette équation suivant δL , δM , δN , δA , δB , δC , après avoir posé, pour simplifier les calculs,

$$\begin{aligned}
 (34) \quad & K' = \frac{l^2}{U_0^2} + \frac{ff'(W_0 + n^2) + lmc'(f + f')}{k^2 U_0^2 V_0 W_0} \\
 & + \frac{m^2}{V_0^2} + \frac{ff'(W_0 + n^2) + lmc'(f + f')}{k^2 U_0 V_0^2 W_0} \\
 & + \frac{n^2}{W_0^2} + \frac{ff'n^2 + lmc'(f + f')}{k^2 U_0 V_0 W_0^2},
 \end{aligned}$$

l'équation (33) prendra la forme plus simple

$$(35) \left\{ \begin{aligned} & \left(K'l + \frac{l}{U_0} \right) \delta L + \left(K'M + \frac{m'}{V_0} \right) \delta M + \left[K'n + n \left(\frac{1}{W_0} + \frac{ff'}{k^2 U_0 V_0 W_0} \right) \right] \delta N \\ & + \left[\frac{l^2}{U_0^2} + \frac{ff'(W_0 + n^2) + lmc'(f + f')}{k^2 U_0^2 V_0 W_0} \right] \frac{\partial A}{a^3} \\ & + \left[\frac{m^2}{V_0^2} + \frac{ff'(W_0 + n^2) + lmc'(f + f')}{k^2 U_0 V_0^2 W_0} \right] \frac{\partial B}{b^3} \\ & + \left[\frac{n^2}{W_0^2} + \frac{ff'n^2 + lmc'(f + f')}{k^2 U_0 V_0 W_0^2} \right] \frac{\partial C}{c^3} + \frac{lm(f + f')}{2k U_0 V_0} \sqrt{-1} = 0. \end{aligned} \right.$$

Pour rendre cette formule encore plus simplifiée, nous introduirons les notations suivantes

$$(36) \left\{ \begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{K'} \left[\frac{l^2}{U_0^2} + \frac{ff'(W_0 + n^2) + lmc'(f + f')}{k^2 U_0^2 V_0 W_0} \right], \\ \Psi &= \frac{1}{K'} \left[\frac{m^2}{V_0^2} + \frac{ff'(W_0 + n^2) + lmc'(f + f')}{k^2 U_0 V_0^2 W_0} \right], \\ \Pi &= \frac{1}{K'} \left[\frac{n^2}{W_0^2} + \frac{ff'n^2 + lmc'(f + f')}{k^2 U_0 V_0 W_0^2} \right], \end{aligned} \right.$$

et posons ensuite

$$(37) \left\{ \begin{aligned} K_1 &= \left(\frac{l}{U_0} \right)^2 + \left(\frac{m}{V_0} \right)^2 + n^2 \left(\frac{1}{W_0} + \frac{ff'}{k^2 U_0 V_0 W_0} \right)^2, \\ l_1 &= -\frac{1}{\sqrt{K_1}} \frac{l}{U_0}, \quad m_1 = -\frac{1}{\sqrt{K_1}} \frac{m}{V_0}, \quad n_1 = -\frac{n}{\sqrt{K_1}} \left(\frac{1}{W_0} + \frac{ff'}{k^2 U_0 V_0 W_0} \right). \end{aligned} \right.$$

Or $l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$, donc l_1 , m_1 , n_1 peuvent être considérés comme les cosinus directeurs d'une certaine direction.

En divisant par $\frac{K'}{\omega}$ l'équation (35) et en tenant compte des notations (36) et (37), il viendra, en remarquant que, d'après (12), on a $(l, m, n) = \frac{\cos(\alpha\beta\gamma)}{\omega}$;

$$(38) \left\{ \begin{aligned} & \left(\cos \alpha - \frac{\omega \sqrt{K_1}}{K'} l_1 \right) \delta L + \left(\cos \beta - \frac{\omega \sqrt{K_1}}{K'} m_1 \right) \delta M + \left(\cos \gamma - \frac{\omega \sqrt{K_1}}{K'} n_1 \right) \delta N \\ & = -\omega \left(\Phi \frac{\delta A}{a^3} + \Psi \frac{\delta B}{b^3} + \Pi \frac{\delta C}{c^3} \right) - \frac{\omega}{K'} \frac{lm(f+f')}{2kU_0V_0} \sqrt{-1} \end{aligned} \right.$$

Si nous remplaçons dans cette équation $\delta L, \delta M, \delta N, \delta A, \delta B, \delta C$ par leurs expressions explicites (27), il viendra, après division par $\sqrt{-1}$,

$$(39) \left\{ \begin{aligned} & f \left[(\lambda \cos \alpha + \mu \cos \beta + \nu \cos \gamma) - \frac{\omega \sqrt{K_1}}{K'} (\lambda l_1 + \mu m_1 + \nu n_1) \right] \\ & = \omega (\Phi a' + \Psi b' + \Pi c') + \frac{\omega}{K'} \frac{lm(f+f')}{2U_0V_0}. \end{aligned} \right.$$

Cette équation qui régit la loi d'extinction provient de la partie imaginaire de l'équation (25).

Posons

$$(40) \quad \cos V_1 = \lambda l_1 + \mu m_1 + \nu n_1$$

et résolvons l'équation (39) par rapport au coefficient d'extinction f , en tenant compte de (29') et de (40), il vient

$$(41) \quad f = \frac{\Phi a' + \Psi b' + \Pi c' + \frac{lm(f+f')}{2K'U_0V_0}}{\cos V'' - \frac{\omega \sqrt{K_1}}{K_1} \cos V_1}.$$

CHAPITRE VII

DISCUSSION DU COEFFICIENT D'EXTINCTION

Considérons le cas que l'on peut réaliser en pratique et où la vibration est rectiligne. Lorsque le milieu n'est pas très opaque, le coefficient de résistance c' provenant de la vitesse du mouvement vibratoire de l'éther étant très petit, ainsi que les coefficients de résistance f , f' , on pourra, dans les expressions de Φ , Ψ , Π , K' , K_1 , négliger, vis-à-vis des termes que l'on conserve, tous ceux qui contiennent soit le produit $ff' = \varphi^2 - g$ [d'après (9)], soit la somme $f + f' = 2\varphi$ quand elle se trouve multipliée par le coefficient c' , et l'on aura alors les valeurs approchées suivantes :

$$(42) \quad K' = K_1 = \left(\frac{l}{U_0}\right)^2 + \left(\frac{m}{V_0}\right)^2 + \left(\frac{n}{W_0}\right)^2 = K.$$

(nous désignons par K la valeur commune de K' et de K_1),

$$(43) \quad \Phi = \frac{1}{K} \frac{l^2}{U_0^2}, \quad \Psi = \frac{1}{K} \frac{m^2}{V_0^2}, \quad \Pi = \frac{1}{K} \frac{n^2}{W_0^2},$$

$$(44) \quad l_1 = -\frac{1}{\sqrt{K}} \frac{l}{U_0}, \quad m_1 = -\frac{1}{\sqrt{K}} \frac{m}{V_0}, \quad n_1 = -\frac{1}{\sqrt{K}} \frac{n}{W_0}.$$

D'autre part, les parties réelles de U , V , W , déduites de (20), sont

$$U_0 = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{\omega^2}, \quad V_0 = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{\omega^2}, \quad W_0 = \frac{1}{c^2} - \frac{1}{\omega^2}$$

d'où nous déduisons

$$\frac{l}{U_0} = \frac{a^2 l}{\omega^2 - a^2} \omega^2, \quad \frac{m}{V_0} = \frac{b^2 m}{\omega^2 - b^2} \omega^2, \quad \frac{n}{W_0} = \frac{c^2 n}{\omega^2 - c^2} \omega^2.$$

On reconnaît là des quantités proportionnelles aux cosinus directeurs l', m', n' de la vibration rectiligne approchée; d'autre part on vérifie facilement que l'on a

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$$

donc l_1, m_1, n_1 se confondent respectivement avec les cosinus l', m', n' de la vibration et nous aurons

$$l_1 = l', \quad m_1 = m', \quad n_1 = n'; \\ \Phi = l'^2, \quad \Psi = m'^2, \quad \Pi = n'^2.$$

Et l'angle V_1 , défini par (40), devient l'angle V' de la vibration avec la normale (λ, μ, ν) au plan d'égale amplitude,

$$(45) \quad \cos V' = \lambda l' + \mu m' + \nu n'.$$

D'autre part, l'équation (31), qui régit la vitesse de propagation des ondes, devient, avec cette approximation, et après division par $U_0 V_0 W_0$

$$(46) \quad \frac{l^2}{U_0} + \frac{m^2}{V_0} + \frac{n^2}{W_0} = 1.$$

Multiplions les relations (44) où l, m, n sont égaux respectivement à l', m', n' par l, m, n et ajoutons-les en tenant compte de (16), il vient

$$(47) \quad ll' + mm' + nn' = \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Soit V l'angle de la vibration (l', m', n') avec la normale (α, β, γ) à l'onde et défini par

$$(48) \quad \cos V = l' \cos \alpha + m' \cos \beta + n' \cos \gamma = \frac{\omega}{\sqrt{k}}.$$

Avec ces nouvelles valeurs approchées, la formule (41) du coefficient d'extinction, où l'on a remplacé la somme $f + f'$ par 2φ d'après les relations (9), devient

$$(49) \quad f = \omega \frac{a'l'^2 + b'm'^2 + c'n'^2 + \varphi l'm'}{\cos V'' - \cos V \cos V'}.$$

On sait que le rayon, la normale aux plans d'onde (α, β, γ) et la vibration (l', m', n') sont dans un même plan et que le rayon est perpendiculaire à la vibration. D'autre part, nous avons désigné par V et V' les angles que fait la vibration (l', m', n') avec la normale à l'onde (α, β, γ) et avec la normale (λ, μ, ν) aux plans d'égale amplitude (48) et (45); par V'' l'angle de ces deux normales (29'). Soit Δ le dièdre formé par le plan de la normale à l'onde et la vibration avec le plan de la normale aux plans d'égale amplitude et la vibration. Dans le trièdre dont les arêtes sont la vibration, la normale aux ondes et la normale aux plans d'égale amplitude, nous aurons

$$\cos V'' - \cos V \cos V' = \sin V \sin V' \cos \Delta$$

et la formule (49) du coefficient d'extinction s'écrira

$$(50) \quad f = \frac{\omega}{\sin V \sin V' \cos \Delta} (a'l'^2 + b'm'^2 + c'n'^2 + \varphi l'm').$$

Interprétation physique du coefficient $\frac{\omega}{\sin V \sin V' \cos \Delta}$. Désignons par V_1 , l'angle aigu formé par le rayon lumineux avec la normale (λ, μ, ν) aux plans d'égale amplitude. Le rayon étant perpendiculaire sur la direction de la vibration (l', m', n') , le tétraèdre dont les arêtes sont formées par le rayon, la normale (λ, μ, ν) aux plans d'égale amplitude et la vibration (l', m', n') aura une face rectangle et nous aurons

$$\cos V_1 = \sin V' \cos \Delta.$$

de sorte que

$$\frac{\omega}{\sin V \sin V' \cos \Delta} = \frac{\omega}{\sin V \cos V_1}.$$

or, $\frac{\omega}{\sin V} = r$ est le rayon dans l'onde courbe de Fresnel (enveloppe des ondes planes parties au même moment, dans différentes directions, d'un certain point et considérées au bout d'un temps égal à l'unité), r représente donc la vitesse de propagation des ondes estimée suivant le rayon. Nous aurons alors

$$(51) \quad \frac{\omega}{\sin V \sin V' \cos \Delta} = \frac{r}{\cos V_1}.$$

Si nous considérons des ondes *fictives* se propageant nor-

malement au rayon avec la vitesse précédente $r = \frac{\omega}{\sin V}$ et que nous estimons leur vitesse ρ le long de la normale (λ, μ, ν) aux plans d'égale amplitude, nous aurons

$$\frac{r}{\cos V_1} = \rho$$

de sorte que le coefficient $\frac{\omega}{\sin V \sin V' \cos \Delta}$ représente cette vitesse fictive ρ

$$\frac{\omega}{\sin V \sin V' \cos \Delta} = \rho.$$

Si nous considérons le coefficient $\frac{\omega}{\sin V \sin V' \cos \Delta}$ sous la forme (51), l'expression (50) du coefficient d'extinction pourra s'écrire

$$(f \cos V_1) = r(a'l'^2 + b'm'^2 + c'n'^2 + \phi l'm').$$

Les Physiciens dans leurs expériences prennent comme coefficient d'absorption ou d'extinction le produit $f \cos V_1$, que nous désignerons par F , de sorte que la formule de ce coefficient employé dans la pratique sera

$$(52) \quad \mathcal{F} = r(a'l'^2 + b'm'^2 + c'n'^2 + \phi l'm').$$

Considérons, maintenant, le facteur d'amortissement ou d'extinction (17') dont l'expression est, avec nos premières notations,

$$(53) \quad \mathcal{A} = e^{-fu} = e^{-f(\lambda x + \mu y + \nu z)}$$

et cherchons son expression avec les notations des Physiciens, c'est-à-dire lorsque l'on introduit *non pas la distance du point* (x, y, z) *au plan d'égalité d'amplitude comptée suivant la normale* (λ, μ, ν) , *mais la longueur du rayon*. Si u est la distance suivant la normale (λ, μ, ν) , δ la distance suivant le rayon et V_1 , l'angle de la normale (λ, μ, ν) avec le rayon, on aura

$$u = \delta \cos V_1, \quad fu = (f \cos V_1) \delta = \mathfrak{F} \delta$$

de sorte qu'en pratique la forme du facteur d'amortissement a l'expression

$$A = e^{-\mathfrak{F} \delta}.$$

Figuration géométrique du coefficient F . — Reprenons l'expression du coefficient d'extinction sous la forme (52) employée par les Physiciens et interprétons-le par une figuration géométrique.

Sur la direction (l', m', n') de la vibration et à partir de la position moyenne O de l'atome d'éther prenons une longueur $OD = \sqrt{\frac{r}{\mathfrak{F}}}$. Si nous désignons par X, Y, Z les coordonnées, par rapport à la position moyenne O , de l'extrémité D du segment OD , nous aurons

$$X = \sqrt{\frac{r}{\mathfrak{F}}} \cdot l', \quad Y = \sqrt{\frac{r}{\mathfrak{F}}} \cdot m', \quad Z = \sqrt{\frac{r}{\mathfrak{F}}} \cdot n'.$$

Remplaçons dans (52) l', m', n' par ces expressions et nous obtenons le lieu de l'extrémité D par l'équation

$$(54) \quad a'X^2 - b'Y^2 + c'Z^2 + \phi X'Y' = 1;$$

C'est un ellipsoïde dit « *Ellipsoïde inverse d'extinction* ». Il est rapporté aux axes d'élasticité du milieu, son centre étant la position moyenne ou d'équilibre de l'atome d'éther, et il admet comme plan de symétrie le plan (XY) de symétrie du milieu.

On voit, en comparant le premier membre de l'équation de cet ellipsoïde avec le potentiel des vitesses V défini par (11) que, à un facteur constant près, il y a identité entre ces deux expressions, les variables étant les vitesses ξ', η', ζ' dans $\mathfrak{V}$ et X, Y, Z dans le premier membre de l'ellipsoïde inverse d'extinction.

La section de l'ellipsoïde (54) par son plan de symétrie (XY) est l'ellipse

$$(55) \quad a'X^2 + b'Y^2 + \phi XY = 1.$$

Or, le mouvement ayant été rapporté, dans le plan des (XY), aux axes d'élasticité du milieu (axes principaux des résistances dues aux accélérations), on voit d'après (55) que les axes de l'ellipse inverse d'extinction qui correspond au plan de symétrie du milieu ne coïncident pas avec les axes d'élasticité du milieu.

On a admis longtemps que les axes d'élasticité coïncident, pour tous les cristaux, avec ceux de l'ellipsoïde inverse d'extinction. M. Laspeyres et ensuite M. Ramsay ont prouvé par l'expérience que cette hypothèse n'est pas vraie pour les cristaux monosymétriques. En outre, M. Becquerel a montré sur divers sels que le maximum et le minimum d'absorption ne coïncident pas avec les axes d'élasticité.

M. Camichel, par des expériences d'une grande précision faites sur l'épidote (système clinorhombique), a calculé

l'inclinaison des axes de l'ellipsoïde d'extinction sur les axes d'élasticité du cristal et ses expériences ont confirmé la forme exponentielle du facteur d'amortissement (17').

M. Carvallo, en adoptant comme je l'ai fait, la méthode mathématique de M. Boussinesq, est arrivé, en se servant d'autres données que moi, à confirmer les résultats des expériences de M. Camichel, qu'il a ensuite vérifiés à l'aide des données expérimentales de ce dernier et des résultats de ses propres expériences.

Nous pourrions, à l'aide de l'équation (55), calculer l'angle aigu ε que fait l'un des axes de l'ellipse d'extinction (55) avec l'axe d'élasticité qui est dirigé suivant O X. A cet effet, faisons tourner les axes X O Y autour de l'origine O de l'angle ε et dans ce nouveau système désignons par x, y les coordonnées. A l'aide des formules classiques

$$X = x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon$$

$$Y = x \sin \varepsilon + y \cos \varepsilon$$

l'équation de l'ellipse d'extinction prend la forme

$$(a' \cos^2 \varepsilon + b' \sin^2 \varepsilon + \varphi \sin \varepsilon \cos \varepsilon)x^2 + (a' \sin 2\varepsilon + b' \cos 2\varepsilon - \varphi \sin \varepsilon \cos \varepsilon)y^2 + [(b' - a') \sin 2\varepsilon + \varphi \cos 2\varepsilon]xy = 1.$$

Or dans ce nouveau système d'axes l'ellipse d'extinction est rapportée à ses axes de symétrie, donc le coefficient du double produit xy dans cette équation est nul, ce qui détermine l'angle cherché ε .

$$\operatorname{tg} 2\varepsilon = \frac{\varphi}{a' - b'}.$$

Remarque. — La formule (52) du coefficient d'extinction $\mathfrak{T}$ contient quatre constantes propres à chaque milieu a' , b' , c' et ϕ . Il faut donc au moins quatre expériences sur chaque milieu pour déterminer ces quatre inconnues. Une expérience de plus servira à vérifier les valeurs déjà déterminées de ces quatre constantes.

Note. — Je suis heureux de voir que M. Boussinesq, dans une note communiquée à l'Académie des Sciences dans la séance du 13 février 1905, a confirmé mes résultats.

Par une démonstration très simple il a obtenu, pour un milieu homogène et translucide, même sans plan de symétrie, la même loi ellipsoïdale d'extinction et a bien voulu rappeler mes résultats.

Vu et approuvé :

Paris, le 21 février 1905.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
P. APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 21 février 1905.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
L. LIARD.

SECONDE THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Théorie des mouvements tourbillonnaires.

Vu et approuvé :

Paris, le 21 février 1905.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
P. APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 21 février 1905.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
L. LIARD.



CHARTRES. — IMPRIMERIE DURAND, RUE FULBERT.